MAI 1 - 12. cvičení

Určitý integrál Reimannův, resp. Newtonův (nabídka příkladů, můžete si vybírat):

1. Výpočet určitého integrálu (Newton-Leibnizova formule, užití substituce a integrace per partes).

Vypočítejte integrály (a rozhodněte zda integrál je Reimannův nebo Newtonův):

1. Jednoduché integrály na začátek:

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx \ ; \quad \int_0^5 \left|x^2-3x+2\right| dx \ ; \quad \int_0^\pi \sin x\,dx \ ; \quad \int_2^3 \frac{1}{1-x^2}\,dx; \quad \int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx \ ; \quad \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \ .$$

2. Výpočet integrálu užitím integrace per partes nebo pomocí substituce:

$$\int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx \ ; \quad \int_0^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx \ ; \quad \int_0^{\sqrt{3}} x^5\sqrt{1+x^2}\,dx \ ; \quad \int_0^{\frac{\pi}{4}} tg\,x\,dx \ ; \quad \int_0^3 \frac{x}{\sqrt{1+x}}\,dx \ ; \int_1^e x\ln^2(x)\,dx; \quad \int_0^1 x.arctg\,x\,dx \ ; \quad \int_0^2 \frac{x}{1+x^4}\,dx;$$

$$\int_2^{1+\sqrt{3}} \frac{1}{x^2-2x+2}\,dx \ ; \quad \int_0^4 \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx \ ; \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3(x)\cdot\cos^2(x)\,dx \ ; \quad \int_0^{2\pi} \cos^2(x)\,dx \ ; \quad \int_0^1 \sqrt{1+e^{2x}}\,dx \ ; \quad \int_{2\sqrt{3}}^{3\sqrt{2}} \frac{1}{x\sqrt{x^2-9}}\,dx;$$

$$\int_2^3 \frac{1}{x^2}.\ln\left(\frac{1}{x}\right)dx \ .$$

A pozor na substituci!

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{\sin x}\cos x\,dx \ ; \quad \int_0^{4\pi} \frac{1}{3-\sin x}\,dx \ \ (\text{substituce } tg(\tfrac{x}{2})=t); \quad \int_0^{\pi} \frac{1}{1+\sin^2(x)}\,dx \ \ (\text{substituce } tg\,x=t).$$

(3. Integrál přes neomezený interval – pro zajímavost, na přednášce jen zmíněno:

$$\int_0^\infty e^{-x}\,dx; \quad \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx; \quad \int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx; \quad \int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx \ \text{ a } \ \int_0^\infty \frac{2x}{1+x^2}\,dx; \quad \int_2^\infty \frac{1}{x\ln x}\,dx; \quad \int_2^\infty \frac{1}{x\ln^2(x)}\,dx \ ;$$

ale $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$ a $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x}{1+x^2}\,dx$ (?) .)

2. Vlastnosti určitého integrálu.

Ukažte, že platí:

1. Je-li $f \in R(-a,a), a>0$ a lichá, pak $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$.
2. Je-li $f \in R(-a,a), a>0$ a sudá, pak $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$.
3. Je-li funkce f definovaná v R, $f \in R(0,p), p>0$ a p – periodická, pak $f \in R(a,a+p)$ pro každé $a \in R$ a platí $\displaystyle\int_a^{a+p} f(x)\,dx = \int_0^p f(x)\,dx$.

4. Je- li funkce f spojitá v $[-a,a]$ ($a>0$) a lichá, pak primitivní funkce k funkci f je v $(-a,a)$ sudá.

5. Spočítejte $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\int_0^x e^{t^2}\,dt}{x}$.

3. Aplikace určitého integrálu:
(zatím jen předběžně – pro další cvičení, pokud se bude probírat na přednášce nebo to bude úkolem cvičení)

a) Spočítejte obsah omezené rovinné oblasti ω, je-li ω ohraničená
   1) grafy funkcí $y=x^2$ a $y=2-x$;
   2) grafy funkcí $y=x^2$ a $y=2-x$ a osou x ;
   3) grafem funkce $y=x-2$ a parabolou $y^2=x$;
   4) grafy funkcí $y=x$ a $y=\dfrac{4}{x}$ a přímkou $x=1$;
   5) grafem funkce $y=\ln x$, tečnou k tomuto grafu v bodě $[1,0]$ a přímkou $x=e$;
   6) grafy funkcí $y=x^2$ a $y=x\cdot\sin x$ a přímkou $x=\frac{\pi}{2}$;
   7) grafy funkcí $y=x^2$ a $y=x\cdot arctg\, x$ a přímkou $x=1$;
   8) grafy funkcí $y=arctg\, x$ a $y=arctg\sqrt{x}$;
   9) obsah kruhu a elipsy .

b) (i) „Zkontrolujte" vzorec pro výpočet objemu koule o poloměru R.
   (ii) Spočítejte objem rotačního tělesa, které vznikne rotací rovinné oblasti ω kolem osy x, kde
   1) $\omega=\left\{[x,y];-\dfrac{\pi}{2}\le x\le\dfrac{\pi}{2},\ 0\le y\le\cos x\right\}$;
   2) $\omega=\{[x,y];\ 1\le x\le e,\ 0\le y\le\ln x\}$;
   3) $\omega=\{[x,y];\ 0\le x\le 2,\ x^2\le y\le 2x\}$;
   4) $\omega=\left\{[x,y]\ ;\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\le 1,\ a>0,\ b>0\right\}$;
   5) omezená oblast ω je ohraničená grafy funkcí $y=xe^x$ a $y=x$ a přímkou $x=1$.

c) Určete délku
   (i) kružnice o poloměru r ;

   (ii) grafu funkce
   1) $y=2\sqrt{x}$, $x\in\langle 1,2\rangle$;
   2) $y=\ln\cos x$, $0\le x\le\dfrac{\pi}{6}$
   3) $y=\dfrac{x^2}{2}$, $0\le x\le a$ („tahák" : $\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}=\ln(x+\sqrt{1+x^2})+C$, $x\in R$).

d) „Zkontrolujte" vzorce pro povrch koule a plášť kuželu.

e) Vyšetřete užitím integrálního kriteria konvergenci řad : $\displaystyle\sum_1^\infty\frac{1}{n^p}$ ($p>0$) ; $\displaystyle\sum_2^\infty\frac{1}{n\ln n}$; $\displaystyle\sum_2^\infty\frac{1}{n\ln^2 n}$.